DIE BEWEGUNG ZWEIER
MATERIELLER PUNKTE
AUF
ZWEI PARALLELEN GERADEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWUERDE

VORGELEGT DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

UNIVERSITÄT FREIBURG IM BREISGAU

VON

OTTO BAUMANN

PROFESSOR AM GROSSH. PÄDAGOGIUM UND REALGYMNASIUM IN LÖRRACH.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

FREIBURG I. B.

UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON CHR. LEHMANN.

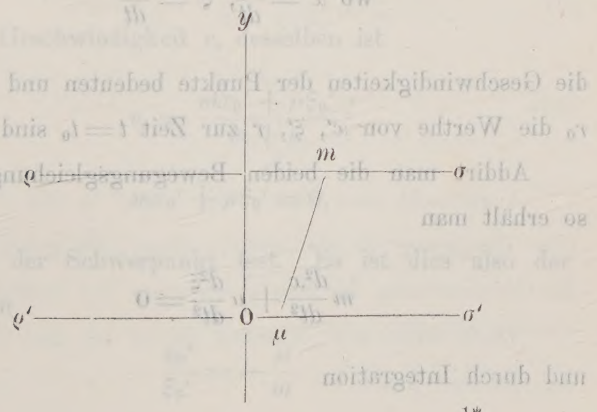
1878.

MATERIELLER PUNKT

INAUGURAL-DISSERTATION

Zwei Punkte, die gezwungen sind, sich auf 2 parallelen Graden zu bewegen, ziehen einander nach dem Newton'schen Gesetze an; welches ist ihre Bewegung?

$\varrho\sigma$ und $\varrho'\sigma'$ seien die Bahnen der beiden Punkte von den Massen m und μ.



Wir beziehen die Bewegung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen XAxe mit $\varrho'\sigma'$ zusammenfällt. Die Abscissen von m bezeichnen wir mit x, die von μ mit ξ; die Entfernung der beiden Bahnen sei $= 1$.

Dann sind die Bewegungsgleichungen der beiden Punkte

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\mu\frac{x-\xi}{r^3}$$

$$\mu\frac{d^2\xi}{dt^2} = -m\mu\frac{\xi-x}{r^3}$$

wo $r = \sqrt{(x-\xi)^2+1}$ die Entfernung der beiden Punkte m und μ bezeichnet. Das Princip der lebendigen Kraft gibt

$$\tfrac{1}{2}m(x'^2 - x_0'^2) + \tfrac{1}{2}\mu(\xi'^2 - \xi_0'^2) = \frac{m\mu}{r} - \frac{m\mu}{r_0},$$

$$\text{wo } x' = \frac{dx}{dt},\ \xi' = \frac{d\xi}{dt}$$

die Geschwindigkeiten der Punkte bedeuten und x_0', ξ_0', r_0 die Werthe von x', ξ', r zur Zeit $t = t_0$ sind.

Addirt man die beiden Bewegungsgleichungen (1), so erhält man

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$

und durch Integration

$$m(x' - x_0') + \mu(\xi' - \xi_0') = 0,$$

wo x_0' und ξ_0' die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte m und μ bezeichnen.

Eine abermalige Integration ergibt

$$(2) \qquad mx + \mu\xi = (mx_0' + \mu\xi_0')\,t - (mx_0 + \mu\xi_0)$$

Die Coordinaten x_s und y_s des Schwerpunktes des Systems sind:

$$x_s = \frac{mx + \mu\xi}{m + \mu},\ y_s = \frac{\mu}{m + \mu}$$

Daraus in Verbindung mit Gleichung (2) folgt:

Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer der Abscissenaxe parallelen Geraden mit constanter Geschwindigkeit der Gleichung entsprechend

$$x_s = \frac{mx_0' + \mu\xi_0'}{m + \mu}t - \frac{mx_0 + \mu\xi_0}{m + \mu}$$

Die Geschwindigkeit v_s desselben ist

$$v_s = \frac{mx_0' + \mu\xi_0'}{m + \mu}$$

Ist $$mx_0' + \mu\xi_0' = 0,$$

so bleibt der Schwerpunkt fest. Es ist dies also der Fall, wenn

$$\frac{x_0'}{\xi_0'} = -\frac{\mu}{m}$$

d. h. wenn die Anfangsgeschwindigkeiten von verschiedenem Zeichen und umgekehrt proportional den Massen sind.

Betrachten wir diesen Fall zuerst und legen, was der Allgemeinheit unbeschadet geschehen kann, die YAxe durch den festen Schwerpunkt.

Da jetzt immer

$$mx + \mu\xi = 0 \text{ und}$$
$$mx' + \mu\xi' = 0,$$

so befinden sich die beiden Punkte immer auf entgegengesetzten Seiten der YAxe, in Entfernungen, die sich umgekehrt verhalten wie die Massen der Punkte und mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten, die sich ebenso verhalten. Für die Geschwindigkeiten x' und ξ' erhält man

$$x' = \sqrt{\frac{2\mu^2}{m+\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + x_0'^2}. \tag{3}$$

$$\xi' = \sqrt{\frac{2m^2}{m+\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \xi_0'^2}. \tag{3a}$$

Vertauscht man also x mit ξ und m mit μ, so geht eine Bewegung in die andere über. Es genügt mithin die Untersuchung der Bewegung eines der beiden Punkte.

Doch sehen wir zunächst davon ab und behandeln den zweiten Fall:

Es bewege sich der Schwerpunkt der allgemeinen Gleichung gemäss mit constanter Geschwindigkeit auf einer der Abscissenaxe parallelen Geraden. Dividirt man jetzt die Bewegungsgleichungen (1) resp. mit m und μ, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x-\xi}{r^3}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -m\frac{\xi-x}{r^3}$$

und durch Subtraction

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2} = -(m+\mu)\frac{x-\xi}{r^3}$$

oder, wenn man $x-\xi=\zeta$ setzt, wo also ζ die relative Abscisse des Punktes m in Bezug auf μ bedeutet,

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -(m+\mu)\frac{\zeta}{(1+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Integration gibt, wenn man

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta' \text{ setzt}$$

$$\tfrac{1}{2}(\zeta'^2 - \zeta_0'^2) = (m+\mu)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0^2}}\right),$$

wo ζ_0' und ζ_0 die entsprechenden Integrationsconstanten sind,

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$(4) \qquad \zeta' = \sqrt{2(m+\mu)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \zeta_0'^2},$$

wo $\sqrt{1+\zeta_2} = r$, $\sqrt{1+\zeta_0^2} = r_0$

gesetzt ist.

Vergleicht man diese Formel für die Geschwindigkeit mit der oben erhaltenen (3 und 3a), wo der Schwerpunkt als fest angenommen wurde, so sieht man, dass beide der Form nach mit einander übereinstimmen und nur verschiedene Constante enthalten. Denkt man sich also den beweglichen Schwerpunkt als Ursprung eines mit dem frühern parallelen Coordinatensystems, so hat in Bezug auf diesen das System eine ganz analog oscillirende Bewegung wie gegen den festen Schwerpunkt, während es gegen das feste Coordinatensystem nur eine fortschreitende Bewegung besitzt.

Die seitherige Untersuchung kann auch in der Weise geführt werden, dass man sich, nachdem man weiss, dass der Schwerpunkt unter gewissen Bedingungen festbleibt, sonst aber eine fortschreitende Bewegung von den oben bezeichneten Eigenschaften besitzt, die Frage stellt nach der relativen Bewegung der Punkte m und μ in Bezug auf den Schwerpunkt.

Setzt man zu diesem Zwecke

$$x = x_1 + \zeta_1, \quad \xi = x_1 - \zeta_2,$$

wo x_1 die Abscisse des Schwerpunktes, ζ_1 und ζ_2 relative Coordinaten von m und μ in Bezug auf den Schwerpunkt bedeuten, so gehen die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (1), da

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$$

ist, über in

$$m \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = - m \mu \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{r^3}$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} = - m \mu \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{r^3}$$

Da nun

$$m \zeta_1 - \mu \zeta_2 = 0$$

ist, so eliminirt man mit Hilfe dieser Gleichung ζ_1 resp. ζ_2 aus beiden Gleichungen und erhält

$$m \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = - \frac{m (m + \mu)}{r^3} \zeta_1$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} = - \frac{\mu (m + \mu)}{r^3} \zeta_2$$

Setzt man in der Formel

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + 1}, \text{ für } x \text{ und } \xi$$

die oben gegebenen Werthe ein, so wird

$$r = \sqrt{(\zeta_1 + \zeta_2)^2 + 1}$$

und daraus kann ebenfalls mit Hilfe der Gleichung

$$m\zeta_1 - \mu\zeta_2 = 0$$

ζ_1 oder ζ_2 eliminirt werden, so dass man erhält

$$r = \sqrt{\left(\frac{m+\mu}{\mu}\zeta_1\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{m+\mu}{m}\zeta_2\right)^2 + 1}$$

Durch Integration der Bewegungsgleichungen erhält man

$$\tfrac{1}{2}(v_1^2 - v_{01}^2) = \frac{\mu^2}{m+\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{01}}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_{02}^2) = \frac{m^2}{m+\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{02}}\right),$$

wo $\frac{d\zeta_1}{dt} = v_1$, $\frac{d\zeta_2}{dt} = v_2$

gesetzt ist und v_{01}, v_{02}, r_{01}, r_{02} entsprechende Integrationsconstanten sind.

Man erhält

(5) $$v_1 = \sqrt{\frac{2m\mu^2}{m+\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{01}}\right) + v_{01}^2}$$

(5a) $$v_2 = \sqrt{\frac{2m^2\mu}{m+\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{02}}\right) + v_{02}^2}$$

Man kann sich jetzt die Frage stellen nach der Möglichkeit der Bewegung der Punkte in constanter Entfernung. Soll eine solche vorhanden sein, so müssen, wie man unmittelbar einsieht, die relativen Geschwindigkeiten der beiden Punkte in Bezug auf den Schwerpunkt Null sein, d. h. es muss

$$v_1 = v_2 = 0 \text{ sein.}$$

Bei constanter Entfernung der beiden Punkte ist aber immer $r = r_0$, also muss mit Rücksicht auf 5 und 5a

$$v_{01} = v_{02} = 0 \text{ sein.}$$

Ferner ist $\zeta_2 = -\zeta_1$.

Mit der Gleichung

$$m\zeta_1 - \mu\zeta_2 = 0$$

liefert dies

$$(m + \mu)\zeta_1 = 0$$

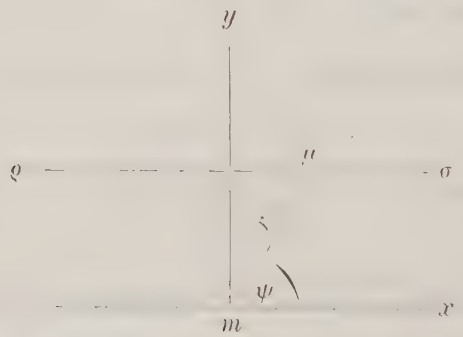
mithin $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$ und daraus $r = 1$.

Es ist also die genannte Bewegung nur möglich, wenn die relativen Anfangsgeschwindigkeiten in Bezug auf den Schwerpunkt Null sind und die Verbindungslinie der beiden Punkte senkrecht auf der Bahn des Schwerpunktes steht.

Wir vereinfachen nur das Problem, indem wir nur

einen Punkt als beweglich, den andern als fest annehmen und werden zeigen, dass die Behandlung dieser vereinfachten Aufgabe für die weitere Lösung des allgemeinen Falles genügt.

Es sei m der feste, μ der bewegliche Punkt; wir nehmen m als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x Axe mit der Bahn $\varrho\sigma$ des beweglichen Punktes parallel ist; r sei der radius vector und ψ der Winkel, den derselbe mit der positiven x Axe bildet; die Entfernung der letztern von der Bahn des beweglichen Punktes sei $= 1$.



Dann ist die Bewegungsgleichung des Punktes μ

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = -m\mu \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Das Princip der lebendigen Kraft gibt

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = m\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ gesetzt.}$$

Daraus

$$(6) \qquad v = \sqrt{2m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + v_0^2}$$

$$= \sqrt{2m(\sin\psi - \sin\psi_0) + v_0^2}$$

Diese Formel für die Geschwindigkeit, verglichen mit den entsprechenden (3, 4, 5) des allgemeinern Falles zeigt, dass sie der analytischen Form nach übereinstimmen und nur die Constanten veränderte Bedeutung haben; es reicht daher für die weitere Behandlung obige Formel vollständig aus.

Behandeln wir zunächst den Fall, in welchem die Geschwindigkeit einmal Null wird. Wenn wir dann die Zeitrechnung an jener Stelle beginnen, so haben wir $v_0 = 0$ zu setzen, was geschehen soll.

Führen wir statt des Winkels ψ seinen Complementwinkel $\frac{\pi}{2} - \psi = \gamma$ ein, so geht obige Formel über in

$$v = \sqrt{m}\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\gamma_0)}$$

Die Bewegung ist eine oscillirende; für $\gamma = 0$ wird

v ein Maximum; für $\gamma = \pm \gamma_0$ gleich Null. Der Punkt bewegt sich in diesem Falle auf der Geraden innerhalb der Winkel $+\gamma_0$ und $-\gamma_0$, die r mit der y Axe zur Zeit $t = 0$ bildet.

Wir haben ferner

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{m}\sqrt{2\,(\cos\gamma - \cos\gamma_0)}}$$

und da $x = \operatorname{tg}\gamma$ ist

$$dt = \frac{d\gamma}{\sqrt{m}\cos^2\gamma\sqrt{2\,(\cos\gamma - \cos\gamma_0)}}$$

mithin, weil für $\gamma = 0$, $t = 0$ angenommen wurde,

$$t = \frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^{\gamma} \frac{d\gamma}{\cos^2\gamma\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\gamma_0)}}$$

Man erhält also t durch ein elliptisches Integral ausgedrückt.

Um dasselbe auf seine Normalform zu bringen, setzen wir

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\gamma_0 \sin\varphi$$

und erhalten

$$(7) \qquad t = \frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - 2\varkappa^2\sin^2\varphi)^2\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

wo $\varkappa^2 = \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma_0$ ist.

Wenden wir nun auf das letzte Integral die Reductionsformel[1]) an

$$(m + \sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi =$$
$$-2\mu A V_{\mu+1} + (2\mu+1) B V_\mu$$
$$-(2\mu+2) C V_{\mu+1} + (2\mu+3)\varkappa^2 V_{\mu+2}$$

wo

$$V_\mu = \int_0^\varphi \frac{(m+\sin^2\varphi)^\mu\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$A = m(1+m)(1+\varkappa^2 m)$$
$$B = 1 + 2m + 2\varkappa^2 m + 3\varkappa^2 m^2$$
$$C = 1 + \varkappa^2 + 3\varkappa^2 m$$

ist, so erhalten wir für $\mu = -1$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-2\varkappa^2\sin^2\varphi)^2\,\Delta\varphi} =$$

$$\frac{1}{(1-2\varkappa^2)\sqrt{m}}\left\{\frac{2\varkappa^2\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\varphi}{2\varkappa^2\sin^2\varphi - 1} - \varkappa^2\int_0^\varphi \frac{\left(-\frac{1}{2\varkappa^2}+\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\Delta\varphi}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{4\varkappa^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(-\frac{1}{2\varkappa^2}+\sin^2\varphi\right)\Delta\varphi}\right\}$$

---

[1]) Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. II. Aufl. S. 64

Bringen wir nun die einzelnen Integrale auf die Normalform, so wird

$$\int_0^{\varphi} \frac{\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2\varkappa^2}\right) d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2\varkappa^2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2\varkappa^2}\right)\Delta\varphi} = -2\varkappa^2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - 2\varkappa^2\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

Diese Werthe in (7) eingeführt, wird

$$t = \frac{1}{(1-2\varkappa^2)\sqrt{m}} \left\{ \frac{2\varkappa^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{2\varkappa^2\sin^2\varphi - 1} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi + \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - 2\varkappa^2\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} \right\}$$

Setzen wir

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u,$$

so geht vorstehende Formel in Jacobi's Bezeichnung über in

$$t = \frac{1}{(1 - 2\varkappa^2)\sqrt{m}} \left\{ \frac{2\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{2\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u - 1} \right.$$

$$- \tfrac{1}{2} u + E(u) + \tfrac{1}{2} \left[u \mid \frac{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')} \right] \times$$

$$\left. i\,\Pi(u, i\,a + K) \right\|$$

oder da

$$i\,\Pi(u, i\,a + K) = i\,\Pi(u, i\,a) + A\,u$$

$$- \operatorname{arc\,tg} \frac{A \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} \text{ ist,}$$

wo zur Abkürzung

$$A = \frac{\varkappa^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}$$

gesetzt wurde.

$$t = \frac{1}{(1 - 2\varkappa^2)\sqrt{m}} \left\{ \frac{2\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{2\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u - 1} \right.$$

$$+ E(u) + \tfrac{1}{2} \frac{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')} \times$$

$$\left. \left| i\,\Pi(u, i\,a) + A\,u - \operatorname{arc\,tg} \frac{A \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} \right| \right\|$$

Bestimmen wir nun die Zeit einer Oscillation. Bewegt sich der Punkt von $\gamma = 0$ bis $\gamma = \gamma_0$, so hat derselbe $\frac{1}{4}$ einer Oscillation zurückgelegt.

Setzen wir also in der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sin \tfrac{1}{2}\gamma_0 \sin \varphi$$

$$\gamma = \gamma_0,$$

so wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die obere Grenze des Integrals. Wir haben dann in obiger Formel für t an die Stelle von u überall K zu setzen und erhalten für die Dauer T einer Oscillation

$$T = \frac{4}{(1-2\varkappa^2)\sqrt{m}}\left[E + \frac{\Delta \operatorname{am}(a,\varkappa')}{2\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a,\varkappa') \cos \operatorname{am}(a,\varkappa')} \times \right.$$

$$\left. \left(i\,H(K, i\,a) + A\,K\right)\right]$$

Da aber

$$H(K, i\,a) = K\,E(i\,a) - i\,a\,E \text{ ist,}$$

so wird

$$T = \frac{1}{(1-2\varkappa^2)\sqrt{m}}\left[E + \frac{\Delta \operatorname{am}(a,\varkappa')}{2\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a,\varkappa') \cos \operatorname{am}(a,\varkappa')} \times \right.$$

$$\left. \left\{i\left(K\,E(i\,a) - i\,a\,E\right) + A\,K\right\}\right]$$

Diese Formel wollen wir etwas umgestalten. Wir setzten bei der Reduction des Integrals 3. Gattung

$$2\varkappa^2 = \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(i\,a + K)$$

also $$\sqrt{2} = \sin\operatorname{am}(i\,a + K)$$

Es ist aber

$$\sin\operatorname{am}(i\,a + K) = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(a, \varkappa')}$$

mithin

$$\frac{1}{\Delta\operatorname{am}(a, \varkappa')} = \sqrt{2}$$

$$\Delta\operatorname{am}(a, \varkappa') = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Daraus folgt

$$\sin\operatorname{am}(a, \varkappa') = \frac{1}{\varkappa'}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma_0\sqrt{2}}$$

$$\cos\operatorname{am}(a, \varkappa') = \frac{\sqrt{2\,\varkappa'^2 - 1}}{\varkappa'\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\cos\gamma_0}}{\cos\frac{1}{2}\gamma_0\sqrt{2}}$$

Es ist ferner

$$E(u) = \frac{E}{K}\,i\,a + Z(i\,a), \text{ also}$$

$$K\,E(i\,a) - i\,a\,E = K\,Z(i\,a).$$

Führt man diese Werthe in die Formel für T ein, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$T = \frac{4}{(1 - 2\varkappa^2)\sqrt{m}}\left[E + \frac{i\,K\,Z(i\,a)}{\sqrt{2\,(1 - 2\varkappa^2)}} + \frac{\varkappa^2 K}{1 - 2\varkappa^2}\right]$$

Nun ist aber

$$i\,Z(i\,a) = -\operatorname{tg}\operatorname{am}(a, \varkappa')\,\Delta\operatorname{am}(a, \varkappa')$$

$$+\frac{a\pi}{2KK'} + Z(a, \varkappa') = -\frac{1}{\sqrt{2\,(1-2\varkappa^2)}} + \frac{a\pi}{2KK'} + Z(a, \varkappa')$$

mithin

$$T = \frac{4}{(1-2\varkappa^2)\sqrt{m}}\left[E + \frac{K}{\sqrt{2(1-2\varkappa^2)}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2(1-2\varkappa^2)}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a\pi}{2KK'} + Z(a, \varkappa')\right) + \frac{\varkappa^2 K}{1-2\varkappa^2}\right]$$

oder, indem man für $\varkappa^2$ seinen Werth $\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0$ eingeführt,

$$T = \frac{4}{\cos\gamma_0\sqrt{m}}\left[E - \frac{K}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\cos\gamma_0}}\left(\frac{a\pi}{2K'} + KZ(a, \varkappa')\right)\right]$$

Wenden wir zunächst diese Formel auf ein numerisches Beispiel an, indem wir $\gamma_0 = 45^0$ setzen und uns siebenstelliger Logarithmen bedienen.

Wir berechnen zuerst q mit Hilfe der bekannten Formel

$$q = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}}\right)^5 + \ldots$$

und erhalten

$$q = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}} = 0{,}009\,895\,4$$

Dabei ist der wesentlichste Theil des Fehlers

$$= \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}}\right)^5 = 0{,}000\ 000\ 000\ 1,$$

den wir vernachlässigen dürfen.

Stellen wir die nöthigen Potenzen von q hier kurz zusammen, so ist

$$\begin{aligned} q &= 0{,}009\ 895\ 4 \\ q^2 &= 0{,}000\ 097\ 9 \\ q^3 &= 0{,}000\ 000\ 9 \\ q^4 &= 0{,}000\ 000\ 009 \end{aligned}$$

K berechnen wir aus der Formel

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} m\, q^{m^2}\right)$$

indem wir

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2\,q)^2$$

setzen und erhalten

$$K = \pi \,.\, 0{,}519\ 986\ 5.$$

Der wesentlichste Fehler ist dabei

$$2\pi q^4 = \pi \,.\, 1{,}000\ 000\ 01.$$

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wir nun die einzelnen Theile der obigen Formel.

Zunächst ist

$$E-\frac{K}{2}=\frac{K}{2}-\frac{2\pi^2}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}+\frac{2q^2}{1-q^4}+\frac{3q^3}{1-q^6}\right)$$

Setzt man die oben gefundenen Werthe für K und q in diese Formel ein, so erhält man bei Vernachlässigung von q^4 und höherer Potenzen

$$E-\frac{K}{2}=\pi\,.\,0{,}221\,165\,7$$

mit dem Fehler

$$-\pi\,.\,0{,}000\,000\,1.$$

Der übrige Theil der Formel ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\cos\gamma_0}}\left[\frac{a\pi}{2K'}+KZ(a,\varkappa')\right]$$

Man findet

$$\frac{1}{\sqrt{2\cos\gamma_0}}=0{,}8408963$$

a erhalten wir mittelst der Formel

$$u=\frac{K}{\pi}\arccos\frac{N}{2q}(1-2q^4+q^2N^2),$$

$$\text{wo } N=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u-\sqrt{\varkappa'}}{\Delta\,\mathrm{am}\,u+\sqrt{\varkappa'}} \text{ ist.}$$

Da für das Argument a der Modul $\varkappa'$ ist, so ist in vorstehender Formel für K und q resp. K' und q' zu setzen. Man findet

$$\begin{aligned} q' &= 0{,}1178577 \\ q'^2 &= 0{,}0138904 \\ q'^3 &= 0{,}0016370 \\ q'^4 &= 0{,}0001929 \\ N &= 0{,}0667506 \\ N^2 &= 0{,}0044556 \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$a = \frac{K'}{\pi} \cdot 1{,}28376,$$

$$\text{mithin } \frac{a\pi}{2K'} = 0{,}64188 \text{ mit dem}$$

wesentlichen Fehler 0,0000002.

Zur Berechnung von $Z(a, \varkappa')$ endlich benutzen wir die Formel

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi\left(q' \sin\frac{\pi a}{K'} - 2q'^4 \sin\frac{2\pi a}{K'}\right)}{K'\left(1 - 2q' \cos\frac{\pi a}{K'} + 2q'^4 \cos\frac{2\pi a}{K'}\right)}$$

$$\text{wobei } K' = -\frac{K \lg q}{\pi}$$

Man erhält

$$KZ(a, \varkappa') = 0{,}4914660.$$

Nimmt man im Zähler und Nenner je ein Glied mehr, so ergibt sich

$$KZ(a, \varkappa') = 0{,}4914659,$$

also als wesentlichsten Fehler

$$-0{,}0000001.$$

Addirt man die erhaltenen Fehler, nachdem man die beiden letzten mit

$$\frac{1}{\sqrt{2\cos\gamma_0}} = 0{,}8408963$$

multiplicirt hat, so sieht man, dass ihre Summe auf die 6. Dezimale des in Klammer stehenden Ausdrucks für T keinen Einfluss ausübt. Setzt man also in der allgemeinen Formel

$$T = \frac{4}{\cos\gamma\sqrt{m}}\left[E - \frac{K}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\cos\gamma}}\left(\frac{a\pi}{2K'} + KZ(a, \varkappa')\right)\right]$$

$$q = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}} = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}\gamma_0}}{1+\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}\gamma_0}},$$

so erhält man bei gleicher Berechnungsweise wie im numerischen Beispiel für $\gamma < 45^0$ T mit gleicher Schärfe

durch nachstehende trigonometrische Formel ausgedrückt, in der

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \cos^2 \beta$$

gesetzt ist,

$$T = \frac{4}{\cos\gamma \sqrt{m}} \left\{ \frac{\pi}{4\cos^4 \tfrac{1}{2}\beta} - \frac{2\pi \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta}{1 - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 \tfrac{1}{2}\beta} \right.$$

$$\left. 1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\beta \left(3 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}^4 \tfrac{1}{2}\beta\right) \right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\cos\gamma}\lg\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\beta\right)} \left(a\cos^4 \tfrac{1}{2}\beta + \right.$$

$$\left. 2\pi^2 \frac{q' \sin\frac{\pi a}{K'} - 2q'^4 \sin\frac{2\pi a}{K'}}{1 - 2q'\cos\frac{\pi a}{K'} + 2q'^4 \cos\frac{2\pi a}{K'}} \right) \Bigg]$$

Kehren wir nun zur frühern Untersuchung zurück.

Ist v_0 nicht gleich Null, so erhält man nach (6) für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2m(\sin\psi - \sin\psi_0) + v_0^2}$$

$$= \sqrt{2m(\cos\gamma - \cos\gamma_0) + v_0^2}$$

Die Geschwindigkeit wird 0 für

$$\cos\gamma = \frac{2m\cos\gamma_0 - v_0^2}{2m}$$

Da γ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma$ also zwischen 1 und 0 liegt, so muss, wenn der Punkt sich zwischen endlichen Grenzen bewegen soll,

$$2m\cos\gamma_0 - {v_0}^2$$

zwischen 0 und $2m$ liegen.

Für $2m\cos\gamma_0 = {v_0}^2$ wird $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Dies ist der kleinste Werth von v_0, für welchen der Punkt nirgends die Geschwindigkeit Null erlangt.

Nun war allgemein

$$dt = \frac{d\gamma}{\sqrt{m}\cos^2\gamma\sqrt{{v_0}^2 + 2m(\cos\gamma - \cos\gamma_0)}}$$

Da $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma$

$\cos\gamma^0 = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0$,

so erhält man

$$dt = \frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{m}\cos^2\gamma\sqrt{{v_0}^2 + 4m\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0 - 4m\sin^2\frac{1}{2}\gamma}}$$

Bei diesem Integral sind drei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist

$${v_0}^2 + 4m\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma_0 < 4m$$

$${v_0}^2 + 4m\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma_0 = 4m$$

$${v_0}^2 + 4m\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma_0 > 4m$$

Erster Fall

$$v_0^2 + 4m \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma_0 < 4m$$

Hervorzuheben ist hier der Specialfall, dass

$$v_0^2 + 4m \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma_0 = 2m$$

ist, was mit der oben gefundenen Bedingung für das assymtotische Verschwinden des Punktes im Unendlichen

$$2m \cos \gamma_0 = v_0^2$$

zusammenfällt.

Wir erhalten in diesem Falle

$$dt = \frac{d\gamma}{\sqrt{m} \cos \tfrac{5}{2}\gamma}$$

$$\int_0^t dt = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\cos \tfrac{5}{2}\gamma}$$

$$(8) \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[\frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{3\sqrt{\cos \gamma}} + \tfrac{1}{3} \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma}} \right]$$

Setzt man

$$\sqrt{\cos \gamma} = z,$$

so wird

$$\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma}} = -2 \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}} = 2 \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}} =$$

$$2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} - 2\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

Entwickelt man $(1-z^4)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze, so erhält man

$$(1-z^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z^4 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}z^8 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}z^{12} + \ldots.$$

mithin

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int dz + \tfrac{1}{2}\int z^4\,dz + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\int z^8\,dz$$

$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\int z^{12}\,dz + \ldots.. =$$

$$z\left(1 + \frac{1}{2\,.\,5}z^4 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,9}z^8 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,13} + \ldots.\right)$$

$$2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 2\left(1 + \frac{1}{2\,.\,5} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,9} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,13} + \ldots.\right)$$

$$= 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi-(\frac{1}{4})}$$

in der Bezeichnung von Gauss.

Ferner wird

$$2\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 2z\left(1+\frac{1}{2.5}z^4+\frac{1.3}{2.4.9}z^8\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6.13}z^{12}+\ldots.\right)$$

oder durch die hypergeometrische Reihe ausgedrückt

$$2\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 2z\,F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},z^4\right).$$

Führt man die gefundenen Werthe in die Formel (8) für t ein, so wird

$$t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{m}}\left[\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{\cos\gamma}}-2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}+\sqrt{\cos\gamma}\,F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\cos^2\gamma\right)\right],$$

indem man für z wieder $\sqrt{\cos\gamma}$ setzt.

Ist allgemein

$$v_0^2+4\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma_0<4,$$

so erhält man

$$dt=\frac{d\,\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{m}\;2\cos^2\gamma\sqrt{\frac{v_0^2+4\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{4}-\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma_0}}$$

Setzt man

$$\frac{v_0^2+4\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{4}=\varkappa^2<1,$$

wo $$x_2 = \frac{r_0^2 + 4m \sin^2 \frac{1}{2}\chi_0}{4m} < 1$$

also $r_0^2 + 4m \sin^2 \frac{1}{2}\chi_0 = \frac{4m}{x}$ ist.

Schreibt man für $\frac{1}{2}\chi$ φ, so wird

$$t = \frac{x}{2m} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(1 - 2\sin^2\varphi)^2 \sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi}},$$

ebenfalls von der früheren Normal für t nicht wesentlich verschieden.